1	2	3	4	5	TOPLAM

Ad :
Soyad :
Numara : CEVAP ANAHTARI
İmza :

16.05.2018

SOYUT MATEMATİK II FİNAL SINAV SORULARI

1) a) $m, n, p \in \mathbb{Z}, (n, p) = 1$ **olsun.** $n|m$ **ve** $p|m \Rightarrow pn|m$ **olduğunu gösteriniz. (10p)**

b) $y \geq 0$ **olmak üzere** $\forall n \in \mathbb{N}^+$ **için** $(1+y)^n \geq 1 + y^n$ **olur mu? Gösteriniz. (10p)**

a) $(n,p)=1 \Longrightarrow \exists\, x,y \in \mathbb{Z} \ni nx+py=1$

$n|m \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ni m = nk$

$p|m \Longrightarrow \exists\, t \in \mathbb{Z} \ni m = pt$

$nx+py=1 \Longrightarrow m(nx)+m(py)=m$

$\Longrightarrow (pt)nx + nk(py) = m$

$\Longrightarrow pn(tx+ky) = m \Longrightarrow pn|m$

b) $n \in \mathbb{N}^+$

$n=1$ için $1+y \geq 1+y$ olup doğrudur

$n=m$ için doğru olsun. $n=m+1$ için doğru mu?

$n=m$ için doğru $\Longrightarrow (1+y)^m \geq 1+y^m \quad \cdots \circledast$

$(1+y)^{m+1} = (1+y)^m(1+y) \geq (1+y^m)(1+y)$ ($\circledast$ dan)

$= 1+y+y^m+y^{m+1}$

$= (1+y^{m+1}) + y + y^m$

$\geq 1+y^{m+1}$

$\therefore\ \forall n \in \mathbb{N}^+$ için $(1+y)^n \geq 1+y^n$ olur.

2) a) $[3,1][1,2]+[4,2]<[2,x]$ sağlayan x sayısını bulunuz. (10p)

b) Rasyonel sayılarda toplama işleminin iyi tanımlı olduğunu gösteriniz. (10p)

a)

$[3,1][1,2]+[4,2]<[2,x] \Leftrightarrow [3.1+1.2,\ 3.2+1.1]+[4,2]<[2,x]$

$\Leftrightarrow [5,7]+[4,2]<[2,x]$

$\Leftrightarrow [9,9]<[2,x]$

$\Leftrightarrow 9+x<9+2$

$\Leftrightarrow x<2$

$x\in\mathbb{N}$ olduğundan $x=0$, $x=1$.

b) $\oplus : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$

$([(x,y)],[(z,t)])\longmapsto [(x,y)]\oplus[(z,t)]=[(xt+yz,\ yt)]$

$([(x,y)],[(z,t)])=([(x',y')],[(z',t')])$ alalım.

$\Rightarrow [(x,y)]=[(x',y')] \wedge [(z,t)]=[(z',t')]$

$\Rightarrow xy'=yx' \ /tt' \wedge zt'=tz' \ /yy'$

$\Rightarrow xy'tt'=yx'tt'$

$zt'yy'=tz'yy'$

$(xt+yz)y't'=yt(x't'+y'z')$

$\Rightarrow [(xt+yz,\ yt)]=[(x't'+y'z',\ y't')]$

$\Rightarrow [(x,y)]\oplus[(z,t)]=[(x',y')]\oplus[(z',t')]$

3) Sayılabilir iki kümenin kartezyen çarpımı sayılabilir midir? Gösteriniz. (20p)

X ve Y sayılabilir iki küme olsun.

X sayılabilir $\Longrightarrow \exists\, f: X \xrightarrow[\text{1-1, örten}]{} A \subseteq \mathbb{N}$

Y sayılabilir $\Longrightarrow \exists\, g: Y \xrightarrow[\text{1-1, örten}]{} B \subseteq \mathbb{N}$

$X \times Y$ sayılabilir mi?

$$h: X \times Y \longrightarrow A \times B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$(x,y) \longmapsto h(x,y) = (f(x), g(y))$$ olarak

tanımlayalım.

- h iyi tanımlı mı?

$\forall (x,y), (x_1,y_1) \in X \times Y$ için

$$(x,y) = (x_1,y_1) \Longrightarrow x = x_1,\ y = y_1 \xrightarrow[\text{tanımlı}]{\text{f ve g iyi}} f(x) = f(x_1),\ g(y) = g(y_1)$$

$$\Longrightarrow (f(x), g(y)) = (f(x_1), g(y_1)) \Longrightarrow h(x,y) = h(x_1,y_1)$$

- h 1-1 mi?

$\forall (x,y), (x_1,y_1) \in X \times Y$ için

$$h(x,y) = h(x_1,y_1) \Longrightarrow (f(x), g(y)) = (f(x_1), g(y_1))$$
$$\Longrightarrow f(x) = f(x_1),\quad g(y) = g(y_1)$$
$$\xrightarrow[\text{f, g 1-1}]{} x = x_1,\quad y = y_1$$
$$\Longrightarrow (x,y) = (x_1,y_1)$$

- h örten mi?

$\forall (a,b) \in A \times B$ için $\exists (x,y) \in X \times Y \ni h(x,y) = (a,b)$ mi?

$$(a,b) \in A \times B \Longrightarrow a \in A \text{ ve } b \in B$$
$$\Longrightarrow \exists x \in X \ni f(x) = a,\ \exists y \in Y \ni g(y) = b$$
$$\xrightarrow{\text{f, g örten}} \exists (x,y) \in X \times Y \ni h(x,y) = (f(x), g(y))$$
$$= (a,b)$$

$\therefore$ $X \times Y$ sayılabilirdir.

4) $r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $r^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < r\}$ kümesi bir kesim ve $Sup r^* = r$ dir. Gösteriniz. (20p)

• K1. $r^* \neq \emptyset$, $r^* = \mathbb{Q}$

K2. $q \in r^*$ ve $p < q$ olsun.

$q \in r^* \Longrightarrow q \in \mathbb{Q},\ q < r$

$\left.\begin{array}{l} q < r \\ p < q \end{array}\right\} \Longrightarrow p < r \Longrightarrow p \in r^*$

K3. $EBE(r^*)$ in olmadığını gösterelim.

$p < r \Longrightarrow p + p < p + r$ $\qquad$ $p < r \Longrightarrow p + r < r + r$

$\Longrightarrow 2p < p + r$ $\qquad$ $\Longrightarrow p + r < 2r$

$\Longrightarrow p < \frac{p+r}{2}$ $\qquad$ $\Longrightarrow \frac{p+r}{2} < r$

$\Longrightarrow p < \frac{p+r}{2} < r$ olup $\frac{p+r}{2} \in r^*$

bu ise $EBE(r^*)$ in olmadığı anlamına gelir. Çünkü iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı vardır. $\therefore$ r^* bir kesimdir.

• $r \notin r^*$ ve $p < r$ olsun. r den küçük tüm p rasyonel sayıları r^* in elemanı olduğundan $Sup r^* = r$ dir.

5) $x, y \in \mathbb{Z},\ x < 0,\ y < 0$ **olmak üzere** $x + y < xy$ **olur mu? Gösteriniz. (20p)**

$x, y \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\exists\, a, b, m, n \in \mathbb{N} \ni$

$x = [a,b]$, $y = [m,n]$ dir.

$x = [a,b] < 0 \implies a < b \implies \exists\ k \in \mathbb{N}^* \ni b = a + k$

$y = [m,n] < 0 \implies m < n \implies \exists\ t \in \mathbb{N}^* \ni n = m + t$

$x + y < xy \iff [a,b] + [m,n] < [a,b][m,n]$

$\iff [a+m, b+n] < [am+bn, an+bm]$

$\iff a+m + an+bm < b+n + am+bn$

$\iff a+m+a(m+t)+(a+k)m < (a+k)+(m+t)+am+(a+k)(m+t)$

$\iff a+m+am+at+am+km < a+k+m+t+am+am+at+km+kt$

$\iff a+m+2am+at+km < (a+m+2am+at+km)+k+t+kt$

$\iff 0 < \underbrace{k+t+kt}_{\in \mathbb{N}^*}$

$\therefore\ x+y < xy$ dir.